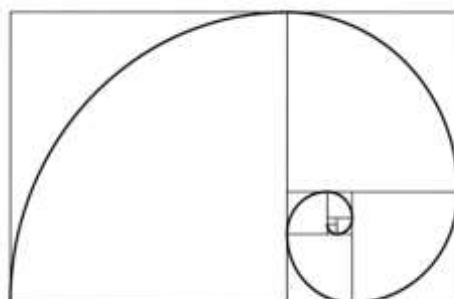


Super Tópicos

Matemática



Grandezas Proporcionais e
Porcentagem

Quantas vezes caiu no ENEM ★★★★★

Complexidade ★★★★★

Tempo de estudo a dedicar ★★★★★

Resumo

Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando, ao variar uma grandeza, a outra também varia na **mesma razão**. Por exemplo: se uma grandeza dobra, a outra também irá dobrar. Se uma grandeza reduzir-se à metade, a outra também terá o mesmo efeito.

Exemplo: Se o preço da gasolina é R\$4,00, 2 litros custarão R\$8,00.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Preço} & & \text{litro} \\
 4 - - - - - & & 1 \\
 \downarrow x - - - - - & & 2 \downarrow \\
 \frac{4}{x} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 8
 \end{array}$$

Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, ao variar uma grandeza, a outra também variará na **razão inversa**. Se uma grandeza dobrar, a outra se reduzirá a metade. Se uma grandeza triplicar, a outra será dividida em três.

Exemplo: A distância entre duas cidades é de 200 km. Se uma pessoa percorrer a uma velocidade média de v (km/h), o tempo de uma viagem de uma cidade a outra será d (em horas).

v	20	40	60	80	100
d	10	5	$\frac{10}{3}$	2,5	2

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Velocidade} & & \text{Tempo} \\
 20 - - - - - & & 10 \\
 \uparrow 60 - - - - - & & x \downarrow \\
 \frac{20}{60} = \frac{x}{10} \quad x \rightarrow \frac{200}{60} = \frac{10}{3}
 \end{array}$$

Escalas

A escala pode ser definida como a razão entre a medida linear do desenho e a medida linear correspondente na realidade.

$$E = \frac{\text{medida do desenho}}{\text{medida no tamanho real}}$$

Exemplo: Uma planta de uma casa foi desenhada na escala 1:100. Isso quer dizer que cada centímetro do desenho corresponde a 100 centímetros da casa.

Existem também **escalas de áreas** que é o valor da escala ao **quadrado** e escalas volumétricas que é o valor da escala ao **cubo**.

Porcentagem

Porcentagem é uma fração de denominador 100.

$$\text{Ex.: } \frac{3}{100} = 3\%$$

$$\frac{37}{100} = 37\%$$

Mas e se a fração não tiver denominador 100? É só transformarmos essa fração em uma que tenha denominador 100.

$$\text{Ex.: } \frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\%.$$

$$\frac{3}{7} = \frac{42,9}{100} = 42,9\%$$

Fatores multiplicativos

Para facilitar o cálculo de um valor resultante de um aumento ou desconto percentual, utilizam-se os fatores multiplicativos.

Imagine uma quantidade C que será aumentada de $x\%$. O resultado desse aumento pode ser calculado por:

$$\text{Valor Final} = C + \frac{x}{100} \cdot C = C \left(1 + \frac{x}{100} \right)$$

Agora imaginemos que C sofra uma redução de $x\%$.

Assim, temos que:

$$\text{Valor final} = C - \frac{x}{100} \cdot C = C \left(1 - \frac{x}{100} \right)$$

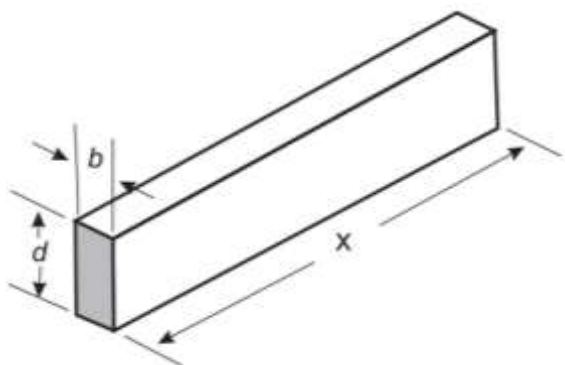
Resumindo:

$$\text{Fator de aumento} = 1 + \frac{x}{100}$$

$$\text{Fator de desconto} = 1 - \frac{x}{100}$$

Exercícios

1. A resistência mecânica S de uma viga de madeira, em forma de um paralelepípedo retângulo, é diretamente proporcional à sua largura (b) e ao quadrado de sua altura (d) e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os suportes da viga, que coincide com o seu comprimento (x), conforme ilustra a figura. A constante de proporcionalidade k é chamada de resistência da viga.



A expressão que traduz a resistência S dessa viga de madeira é:

- a) $S = \frac{k \cdot b \cdot d^2}{x^2}$
 b) $S = \frac{k \cdot b \cdot d}{x^2}$
 c) $S = \frac{k \cdot b \cdot d^2}{x}$
 d) $S = \frac{k \cdot b^2 \cdot d}{x}$
 e) $S = \frac{k \cdot b \cdot 2d}{2x}$

2. José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Na segunda parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4 : 4 : 2, respectivamente.

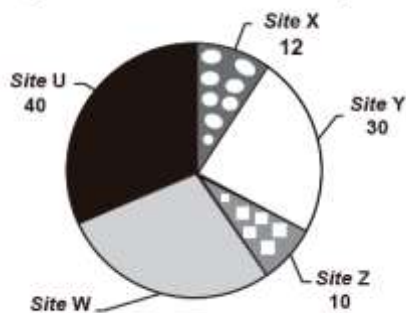
Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

- a) 600, 550, 350
 b) 300, 300, 150
 c) 300, 250, 200
 d) 200, 200, 100
 e) 100, 100, 50
3. Para uma viagem a capacidade de passageiros de um barco de turismo é equivalente ou a 30 adultos ou 36 crianças. Se 24 crianças já estão a bordo desse barco, o número máximo de adultos que ainda podem embarcar é:
- a) 6
 b) 8
 c) 10
 d) 12
 e) 14

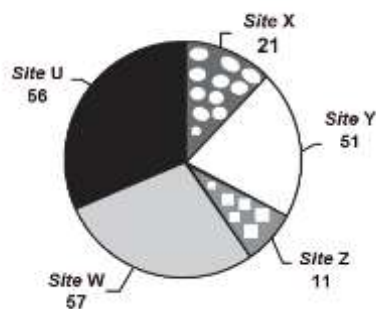
4. Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha. Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:
- a) 920 kg.
 - b) 800 kg.
 - c) 720 kg.
 - d) 600 kg.
 - e) 570 kg.
5. A altura de determinado retângulo aumentou em 20% e a medida de sua base diminuiu em 20%. Após essas mudanças, podemos afirmar que a área desse retângulo:
- a) aumentou 4%
 - b) aumentou 2%
 - c) diminuiu 2%
 - d) diminuiu 4%
 - e) permaneceu inalterada
6. 95% da massa de uma melancia de 10 kg é constituída de água. A fruta é submetida a um processo de desidratação (que elimina apenas a água) até que a participação da água na massa da melancia se reduza a 90%. A massa da melancia após o processo de desidratação será igual a:
- a) $5/9$ kg
 - b) $9/5$ kg
 - c) 5 kg
 - d) 9 kg
 - e) 9.5 kg
7. Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1 : 400, e que seu volume é de 25 cm^3 . O volume do monumento original, em metro cúbico, é de:
- a) 100
 - b) 400
 - c) 1600
 - d) 6 250
 - e) 10000
8. Em 2006, a produção mundial de etanol foi de 40 bilhões de litros e a de biodiesel, de 6,5 bilhões. Neste mesmo ano, a produção brasileira de etanol correspondeu a 43% da produção mundial, ao passo que a produção dos Estados Unidos da América, usando milho, foi de 45%.
- Disponível em: planetasustentavel.abril.com.br. Acesso em: 02 maio 2009.
- Considerando que, em 2009, a produção mundial de etanol seja a mesma de 2006 e que os Estados Unidos produzirão somente a metade de sua produção de 2006, para que o total produzido pelo Brasil e pelos Estados Unidos continue correspondendo a 88% da produção mundial, o Brasil deve aumentar sua produção em, aproximadamente,
- a) 22,5%.
 - b) 50,0%.
 - c) 52,3%.
 - d) 65,5%.
 - e) 77,5%.

9. Quanto tempo você fica conectado à internet? Para responder a essa pergunta foi criado um minia aplicativo de computador que roda na área de trabalho, para gerar automaticamente um gráfico de setores, mapeando o tempo que uma pessoa acessa cinco sites visitados. Em um computador, foi observado que houve um aumento significativo do tempo de acesso da sexta-feira para o sábado, nos cinco sites mais acessados. A seguir, temos os dados do minia aplicativo para esses dias.

Tempo de acesso na sexta-feira (minuto)



Tempo de acesso no sábado (minuto)



Analisando os gráficos do computador, a maior taxa de aumento no tempo de acesso, da sexta-feira para o sábado, foi no site

- a) X.
- b) Y.
- c) Z.
- d) W.
- e) U.

10. A mensagem digitada no celular, enquanto você dirige, tira a sua atenção e, por isso, deve ser evitada. Pesquisas mostram que um motorista que dirige um carro a uma velocidade constante percorre "às cegas" (isto é, sem ter visão da pista) uma distância proporcional ao tempo gasto ao olhar para o celular durante a digitação da mensagem. Considere que isso de fato aconteça. Suponha que dois motoristas (X e Y) dirigem com a mesma velocidade constante e digitam a mesma mensagem em seus celulares. Suponha, ainda, que o tempo gasto pelo motorista X olhando para seu celular enquanto digita a mensagem corresponde a 25% do tempo gasto pelo motorista Y para executar a mesma tarefa.

Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 21 jul. 2012 (adaptado).

A razão entre as distâncias percorridas às cegas por X e Y, nessa ordem, é igual a

- a) $5/4$
- b) $1/4$
- c) $4/3$
- d) $4/1$
- e) $3/4$

Gabarito

1. A

A constante de proporcionalidade deve ser multiplicada pelas grandezas a que a resistência mecânica S é diretamente proporcional e dividida pelas grandezas inversamente proporcionais, o que dá a expressão da letra A.

2. B

Seja X o total de laranjas:

Na primeira viagem, temos $\frac{6x}{15}$, $\frac{5x}{15}$ e $\frac{4x}{15}$ (José, Carlos e Paulo)

Na segunda viagem, temos $\frac{4x}{10} = \frac{6x}{15}$, $\frac{4x}{10} = \frac{6x}{15}$ e $\frac{2x}{10} = \frac{3x}{15}$ (José, Carlos e Paulo).

Carlos foi o único que transportou mais laranjas.

$$\frac{6x}{15} - \frac{5x}{15} = 50 \Rightarrow x = 750$$

Portanto, na segunda viagem, José transportou 300 laranjas, Carlos 300 laranjas e Paulo 150 laranjas.

3. C

Fazemos uma regra de 3 para vermos a quantos adultos equivalem 24 crianças:

30 adultos ____ 36 crianças

x adultos ____ 24 crianças.

Resolvendo a regra de 3, encontramos $x = 20$ adultos.

Assim, só poderão entrar mais 10 adultos.

4. A

Primeiramente perceba que se os alunos arrecadaram 12kg por 10 dias então isto resulta em $12\text{kg} \times 10 \text{ dias} = 120 \text{ kg}$. Além disso 30 novos alunos se juntaram aos 20 alunos iniciais então teremos 50 alunos arrecadando nos 20 dias que ainda restam.

Nesse caso como a regra de três é composta, devemos comparar a grandeza onde está a incógnita com cada uma das demais. Podemos então perceber que para aumentar o número de alimentos seria necessário que todas as outras grandezas também aumentassem. Logo, todas elas são diretamente proporcionais à grandeza alimento (Kg). Assim, não é preciso inverter a razão. Assim:

$$120/x = 20/50 \cdot 10/20 \cdot 3/4$$

$$x = 800 \text{ kg}$$

$$\text{Total arrecadado} = 800 + 120 \text{ (inicialmente)} = 920\text{kg}$$

5. D

$$A_1 = b \times h$$

$$A_2 = 0,8b \times 1,2h = 0,96bh = 96\%A_1$$

Logo, houve redução de 4%

6. C

Se 95% da massa inicial (10kg) é água, então a massa de água inicial é de 9,5kg e consequentemente parte "sólida" tem 0,5kg.

Depois da desidratação a massa "sólida" se mantém constante (0,5kg).

Se no final a água compõe 90% da massa total, a massa sólida (0,5kg) compõe 10%, sendo assim.

$$0,5\text{kg} \text{ --- } 10\%$$

$$x\text{kg} \text{ --- } 100\%$$

7. C

Como a escala é $1/400$ e o volume 25cm^3 então devemos utilizar $(1/400)^3$. Por regra de três temos que o volume real é de $400^3 \cdot 25 = 1600000\text{cm}^3$ ou 1600m^3

8. C

Em 2009, a produção mundial de etanol será a mesma de 2006.

A produção do Brasil e Estados Unidos em 2006, foi de: $43\% + 45\% = 88\%$.

A produção dos Estados Unidos em 2009 será a metade da produção de 2006: $45\%/2 = 22,5\%$.

Assim, a produção do Brasil será de: $88\% - 22,5\% = 65,5\%$.

$$0,43 \text{-----} 100\%$$

$$0,65 \text{-----} x$$

$$x = (0,265 \cdot 100)/0,43$$

$$x \cong 1,523$$

Representando um aumento de $(1,523 - 1) = 0,523 = 52,3\%$

9. A

Considere as taxas de aumento de cada um dos sites:

$$X: 9/12 = 0,75$$

$$Y: 21/30 = 0,7$$

$$Z: 1/10 = 0,1$$

$$W: 19/38 = 0,5$$

$$U: 16/40 = 0,4$$

Logo a maior taxa de aumento é a do site X.

10. B

$$D_1/D_2 = v \cdot t_1 / v \cdot t_2 = v \cdot 0,25t_2 / v \cdot t_2 = 0,25 = 1/4$$